

# Métodos computacionales 3D para predicción de retrodispersión acústica (Fuerza de Blanco) de submarinos.

Edmundo F. Lavia\*, Juan D. Gonzalez\*\*, Rui A. Marques Rojo y Igor S. Prario

Departamento de Propagación Acústica. Dirección de Investigación de la Armada (DIIV). Laprida 555 Vicente Lopez, (1638) Buenos Aires, Argentina  
UNIDEF (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas – Ministerio de Defensa)

(\*) [sivasadartantassvueltasnosirve@gmail.com](mailto:sivasadartantassvueltasnosirve@gmail.com), (\*\*) [juanrst@hotmail.com](mailto:juanrst@hotmail.com)

**Resumen** El parámetro fuerza de blanco (TS, por sus siglas en inglés, *Target Strength*), que cuantifica la respuesta acústica de un blanco dispersor ubicado bajo el agua, es uno de los términos esenciales para la ecuación SONAR activa, utilizada para maniobras operativas que involucran tanto buques de superficie como submarinos. En este trabajo se resumen los métodos desarrollados en la última década en la División de Sistemas Acústicos para la predicción del parámetro TS en submarinos. Estos métodos se basan en la solución tridimensional de la ecuación de onda para fuentes armónicas de sonido mediante técnicas de ecuaciones integrales provenientes de la física matemática, como la Aproximación de Kirchhoff y el Método de los Elementos de Contorno (BEM, por *Boundary Element Method*). Las soluciones se obtienen utilizando sistemas de cómputo de alto rendimiento y código optimizado para paralelización y procesamiento intensivo, esencial para BEM en su versión no acelerada donde el tiempo de ejecución puede extenderse varios días dependiendo de la frecuencia operativa del SONAR y la longitud característica del buque. Se abordarán las limitaciones y supuestos de los distintos métodos actuales así como los pasos subsiguientes destinados a mejorar las predicciones de TS y consecuentemente el alcance predicho SONAR.

**Keywords:** Acústica, Scattering, TS, submarinos, Kirchhoff, BEM

## 1. Introducción

La acústica es la forma más práctica de sensor objetos presentes dentro de grandes extensiones de agua y por ello no sorprende que el conocimiento del parámetro SONAR TS (Fuerza de Blanco, o *Target Strength*), que cuantifica la respuesta de un blanco ante una onda de presión, sea de fundamental importancia por sus aplicaciones tanto civiles como militares. Entre las primeras, pueden citarse el diseño de ecosondas destinadas a pesquerías y las estimaciones acústicas de abundancia numérica y biomasa de peces y otros organismos acuáticos; entre las segundas, el diseño de sonares destinados a la detección de

vehículos submarinos y el cálculo del Alcance Predicho SONAR (APS) a partir de la resolución de las ecuaciones SONAR, donde TS es una de las entradas.

Desde hace poco más de diez años en la División Acústica Submarina se ha abordado el problema del cálculo del TS producido por dispersores volumétricos, comenzando por el caso de formas simples como esferas y esferoides, cuerpos que modelan morfológicamente muchos objetos de interés, y cuya dispersión (o *scattering*) puede ser calculada por técnicas clásicas basadas en expansiones de funciones de onda ortonormales, escritas en sistemas coordenados donde la ecuación de Helmholtz es separable. Aplicaciones de estos modelos en el ámbito de pesquerías [1,2] se realizaron dentro del marco del proyecto PIDDEF 27-10. Esto generó el *know how* que permitió abordar la modelación del TS producido por submarinos, parte de las actividades del subsiguiente PIDDEF 13/14 y que condujo al desarrollo de dos implementaciones computacionales basadas en la aproximación de Kirchhoff y el método BEM (*Boundary Element Method*), que continúan mejorándose. Parte de los resultados, correcciones y ampliaciones aparecieron en [3,4,5], trabajos a los cuales se remite al lector interesado en detalles.

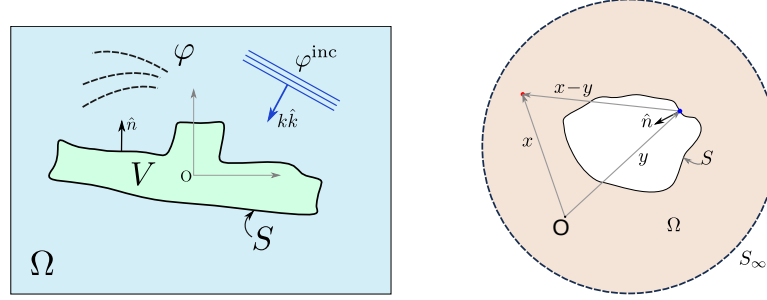
Modelar el TS de submarinos requiere resolver el problema exterior acústico que involucra a la ecuación de Helmholtz (se asumen campos con dependencia temporal  $e^{-i\omega t}$ ) y un objeto dispersor inmerso en un medio homogéneo, para una frecuencia angular  $\omega = 2\pi f$  que verificará en general  $\omega l/c \gg 1$ , donde  $l$  es una longitud característica del objeto dispersor y  $c$  la velocidad de sonido del medio externo (el agua en nuestro caso). Es decir que es un problema de scattering de alta frecuencia, donde la forma del objeto dispersor es importante lo cual implica, entre otras cosas, que su geometría debe estar bien representada.

Si bien un submarino debería modelarse como un objeto elástico constituido, al menos, por una cáscara de hierro encerrando aire, la altísima complejidad de tal enfoque, que es vectorial y requiere el cálculo del tensor de esfuerzos del cuerpo, prohijó desde temprano su modelación como objeto impenetrable e inamovible con condición de contorno rígida (condición tipo Neumann, derivada normal de la presión nula sobre la superficie).

En este trabajo se presentarán resultados de las implementaciones para cálculo de TS por submarinos bajo la utilización de dos métodos: aproximación de Kirchhoff (KA, por *Kirchhoff Approximation*) y método BEM (*Boundary Element Method*). La Sección 2 contiene la teoría básica del problema acústico y de los métodos antedichos, la Sección 3 presenta algunos resultados representativos y finalmente un sumario del trabajo y próximos pasos cierran el trabajo en la Sección 4.

## 2. Problema acústico de scattering y soluciones integrales

Un esquema del problema de scattering por objetos no penetrables se muestra en la Figura 1 (izquierda). Un campo de presión  $\varphi^{\text{inc}}$  conocido, la onda incidente, interactúa con un objeto  $V$  de superficie  $S$  inmerso en un medio no acotado y homogéneo  $\Omega$  con propiedades  $c, \rho$  (velocidad de sonido y densidad).



**Figura 1.** (Izq.) Esquema del problema de scattering. Un campo  $\varphi^{\text{inc}}$ , con vector de onda  $k\hat{k}$ , incide sobre un dispersor  $V$  de superficie  $S$ , inmerso en un medio homogéneo  $\Omega$ , lo que provoca la aparición de un campo dispersado  $\varphi$ . Diferentes incidencias  $\hat{k}$  determinarán diferentes campos  $\varphi$ , lo cual permite caracterizar al obstáculo  $V$ . (Der.) Entes geométricos involucrados en la construcción de la fórmula de Helmholtz-Kirchhoff.

Como consecuencia se tendrá un campo dispersado  $\varphi$ , en principio en todas direcciones, que es el objeto de interés y que verificará la ecuación de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi = 0. \quad (1)$$

Se suele usar  $\varphi^{\text{inc}} = e^{ik\hat{k}\cdot\mathbf{x}}$ , una onda plana de número de onda  $k = 2\pi f/c = \omega/c$  y dirección  $\hat{k}$ . En general y debido a cuestiones experimentales es de interés el campo dispersado registrado en la misma dirección, pero sentido inverso, desde la cual se incide (dirección  $-\hat{k}$ ), la cual se conoce como de retrodispersión (*backscattering*). Asimismo, lo usual es requerirlo para el campo lejano (*farfield*) del objeto que produce el scattering. Bajo ese supuesto el campo se puede escribir

$$\varphi(x) = f_\infty(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

es decir, como una onda esférica que emana de un punto elegido como origen dentro del objeto, multiplicada por un “factor de forma” o amplitud de scattering  $f_\infty$  que solo depende de la dirección. El TS se define luego como

$$\text{TS} = 10 \log_{10}(|f_\infty|^2). \quad (2)$$

### 2.1. Fórmula de Helmholtz-Kirchhoff

La formulación integral del problema comienza transformando la PDE (1). Supongamos dos campos escalares,  $G(x, y)$  y  $\varphi(x)$  que verifican en el volumen  $\Omega$  (ver Figura 1 derecha) las siguientes ecuaciones de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + k^2)G(x, y) = -\delta(x - y), \quad (\nabla^2 + k^2)\varphi(x) = 0 \quad (3)$$

donde el laplaciano en la primer ecuación es respecto de las coordenadas de  $y$ . Integrando en  $\Omega$  el producto de  $\varphi$  por la primer ecuación de (3) se tiene

$$\int_{\Omega} [\varphi(y)\nabla^2 G(x, y) + k^2\varphi(y)G(x, y)] dV(y) = -\varphi(x),$$

donde el miembro derecho resulta de integrar la delta de Dirac. Aplicando repetidamente integración por partes para *sacar afuera* el operador nabla, se tiene

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\varphi \nabla G - \nabla \varphi G) - (\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi) G] dV(y) = -\varphi(x),$$

donde las dependencias explícitas se removieron por claridad. Dado que en  $\Omega$  se verifica (3) se tendrá

$$\varphi(x) = - \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\varphi \nabla G - \nabla \varphi G)] dV(y),$$

o bien, aplicando el teorema de la divergencia a la integral volumétrica, y utilizando la nomenclatura  $\partial_n \equiv \hat{n} \cdot \nabla$  para la derivada normal,

$$\varphi(x) = \int_S [\partial_n \varphi(y) G(x, y) - \varphi(y) \partial_n G(x, y)] dS(y), \quad (4)$$

donde la integral solo abarca la superficie  $S$  en virtud de que la integral sobre  $S_{\infty}$  tiene aporte nulo<sup>1</sup>. La expresión (4) es la fórmula de Helmholtz-Kirchhoff y posibilita calcular el campo  $\varphi(x)$  en un punto externo a través del conocimiento de  $\varphi$  y  $\partial_n \varphi$  sobre una superficie  $S$ . La función  $G(x, y)$  es un campo auxiliar conocido; la función de Green del espacio libre para la ecuación escalar de Helmholtz,  $G(x, y) = e^{ikr}/(4\pi r)$  con  $r \equiv |x - y|$ .

## 2.2. Aproximación de Kirchhoff

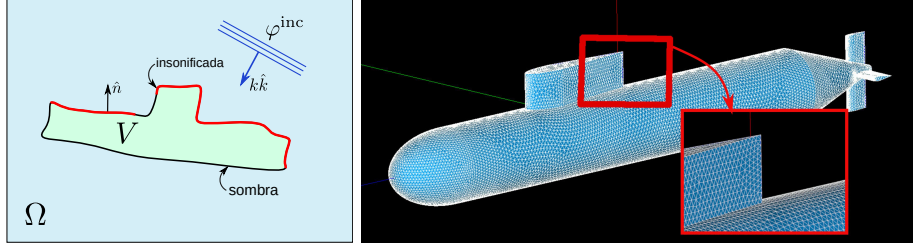
La aproximación de Kirchhoff (KA) [6] es una manera de evaluar (4) sin resolver realmente la ecuación integral que plantea. El valor, incógnita, de los campos  $\varphi, \partial_n \varphi$  sobre la superficie  $S$ , se reemplaza por el valor de los correspondientes campos incidentes, pero solamente en aquellos puntos que son geoméricamente alcanzados por la onda (la zona “insonificada”) mientras que en los restantes puntos (en “sombra”) esos campos se asumen nulos.

Con incidencia plana, el  $f_{\infty}$  de backscattering se puede evaluar según

$$f_{\infty} = \frac{ik}{2\pi} \int_{S^*} e^{i2k\hat{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{n} \cdot \hat{k} dS(\mathbf{x}), \quad (5)$$

donde la integral es sobre la superficie  $S^*$ , la parte insonificada de  $S$ , ver Figura 2 izquierda. Esta integral puede realizarse de manera inmediata para formas simples cuya superficie admite una parametrización analítica, como por ejemplo la esfera, el esferoide y el cilindro. Para formas más complejas resulta conveniente utilizar una descripción de la superficie en términos de elementos sencillos, una superficie de malla o *mesh*, como triángulos planos [7] o curvos [4], las cuales pueden ser generadas en software CAD. Luego la integral que prescribe (5) se

<sup>1</sup> Los campos decaen más rápidamente de lo que crece el área de  $S_{\infty}$  como consecuencia de la condición de Sommerfeld[6].



**Figura 2.** (Izq.) Bajo la KA se considera que sobre la parte insonificada por el campo incidente, en rojo, el campo y su derivada normal toman los valores del campo incidente mientras que sobre la parte en sombra ambos son nulos. (Der.) Superficies complejas, como la de un submarino, se describen a través de una malla de triángulos.

transforma en la suma de integrales sobre cada uno de esos elementos sencillos. En el caso del submarino diferentes mallas se generaron a partir de un diseño realizado dentro del software SALOME [9], ver Fig. 2 derecha.

Sobre la superficie de un triángulo plano, la (5) admite solución cerrada de modo que  $f_\infty$  implica solamente evaluación analítica. La utilización de triángulos curvos, en cambio, si bien permite una descripción más precisa de la superficie por la curvatura involucrada, requiere integración numérica lo cual es más costoso computacionalmente. Ambos modelos se analizaron en [4] determinándose el siguiente compromiso: la integración plana requiere muchos triángulos para representar la curvatura de un cuerpo y por ende muchas más integrales aunque cada una de ellas es sencilla; la integración curva permite representar la curvatura con muchos menos elementos pero cada integración es más costosa.

### 2.3. Boundary Element Method

El método BEM resuelve una versión discreta de la ecuación (4) que surge de la discretización de  $S$ . En efecto, considerando que la misma se compone de  $N$  triángulos planos, donde los campos  $\varphi$  y  $\psi \equiv \partial_n \varphi$  son constantes, resulta

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^N \psi_j \int_{\Delta_j} G(x, y) dS(y) - \varphi_j \int_{\Delta_j} \partial_n G(x, y) dS(y), \quad (6)$$

donde se integra en cada triángulo  $j$ -ésimo la función de Green y su derivada normal, mientras que las constantes  $\varphi_j, \psi_j$  constituyen las incógnitas. La fórmula (6) está evaluada en un punto  $x$  de  $\Omega$ , pero llevándolo a un punto arbitrario de un triángulo  $i$  de la superficie  $S^2$  resulta en

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N \psi_j \int_{\Delta_j} G(x_i, y) dS(y) - \varphi_j \left( \int_{\Delta_j} \partial_n G(x_i, y) dS(y) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \right), \quad (7)$$

<sup>2</sup> Esto debe ser hecho mediante un proceso límite dado que la (4) es discontinua como función de  $x$ .

donde ahora tanto  $i$  como  $j$  refieren a los triángulos que constituyen  $S$ . Las integrales se pueden interpretar como elementos de matrices de acuerdo con

$$S_{ij} = \int_{\Delta_j} G(x_i, y) dS(y), \quad K_{ij} = \int_{\Delta_j} \partial_n G(x_i, y) dS(y) \quad (8)$$

y sumándole el campo incidente  $\varphi^{\text{inc}}$  al campo  $\varphi$  de la (7), se llega a

$$\left( K_{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \right) \varphi_j - L_{ij} \psi_j = -\varphi_i^{\text{inc}},$$

que es una ecuación integral discreta del primer tipo (*first kind boundary integral equation*). Para un problema de condición de contorno rígida, la derivada normal del campo sobre la superficie se anula ( $\psi_j = 0$ ) y entonces

$$\left( K_{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \right) \varphi_j = -\varphi_i^{\text{inc}}, \quad (9)$$

define un sistema matricial de  $N \times N$  del cual se pueden obtener los  $\varphi_j$  que permitirán, merced a (6), calcular el campo en  $\Omega$ . Actualmente la (9) provee una solución inestable para  $k \gtrsim 4$  de modo que en la práctica se usan formulaciones mejoradas [5,8] aunque la idea base es esta. Las integrales definidas en (8) son integrales singulares dado que sobre la superficie tanto  $G$  como  $\partial_n G$  divergen en la diagonal  $i = j$ . Por ello deben emplearse técnicas especiales de integración.

Dado que el campo se asume constante sobre cada uno de los triángulos, se sigue que existe un compromiso entre la longitud de onda del campo incidente, que entra en  $k = 2\pi/\lambda$ , y el tamaño de los triángulos. La longitud característica de cada triángulo que compone  $S$  debe ser siempre menor (cinco o seis veces) a la longitud de onda incidente para asegurarse que sobre un dado triángulo el valor del campo se pueda asumir constante. Por ello a medida que sube la frecuencia  $\omega = kc$  el tamaño  $N^2$  del sistema se incrementará acordeamente.

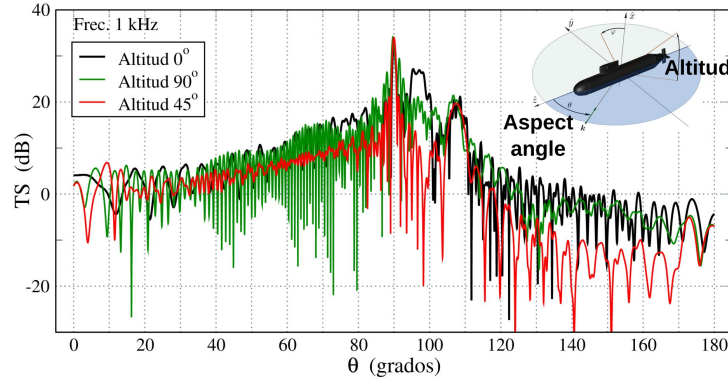
### 3. Aplicación a un submarino modelo. Resultados

La evaluación del TS debido a submarinos es un tema sensible debido a la naturaleza confidencial de los detalles constructivos del material naval existente. Para posibilitar la comparación entre distintos métodos destinados a la predicción del TS, un modelo benchmark denominado BeTSSi (de *Benchmark Target Strength Simulation submarine*) se presentó en [10]. Siguiendo un plano publicado en dicho trabajo se construyó en SALOME el modelo denominado BeTSSi simple, que fue el utilizado para todos los experimentos numéricos reportados aquí.

Para este submarino se evaluará el TS, de acuerdo con (2), para algunas frecuencias representativas y en función de los dos ángulos definidos en el inserto de la Figura 3, denominados aspect angle  $\theta$  y altitud.

### 3.1. Kirchhoff approximation

El cálculo del TS requiere la suma de las integrales sobre los triángulos insonificados para cada una de las incidencias dadas por  $\theta$  y la altitud. Se considera insonificado un elemento  $j$  de normal  $\hat{n}_j$  si se verifica  $\hat{k} \cdot \hat{n}_j < 0$ , criterio siempre correcto para superficies convexas. La concavidad provocará que partes del cuerpo determinen sombras sobre sí mismo, estimando por exceso la insonificación<sup>3</sup>.

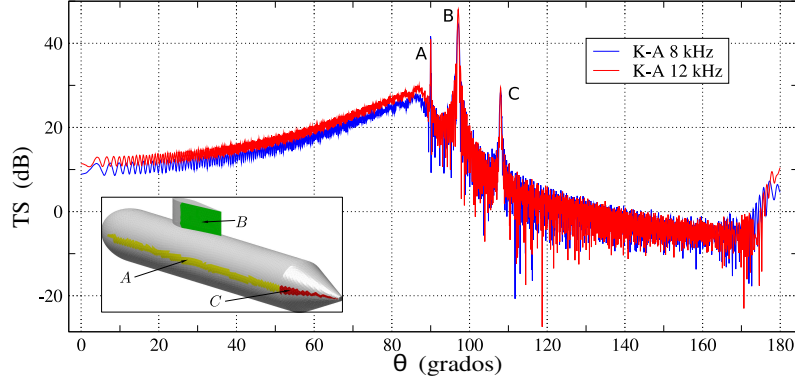


**Figura 3.** TS de backscattering del submarino BeTSSi (mesh de 18000 triángulos curvos) para las tres altitudes indicadas en función del aspect angle  $\theta$  (ver definición en el inserto) y a una frecuencia  $f = 1$  KHz.

La Figura 3 muestra el TS en función del ángulo  $\theta$  para tres altitudes a  $f = 1$  KHz. A esa frecuencia y considerando  $c = 1500 \text{ ms}^{-1}$ , resulta  $\lambda = 1.5$  m de modo que, dadas las medidas del submarino (61.5 m de largo y diámetro de casco 7.5 m), en su longitud entran  $40 \lambda$ . Esto implica que el problema es de media-alta frecuencia, donde la forma geométrica del cuerpo es importante. La mesh utilizada tiene 18000 triángulos curvos, cantidad por exceso para esta frecuencia. Utilizando triángulos planos, a esta frecuencia similares resultados se obtienen con una mesh de  $\sim 80$  mil elementos.

Un gráfico de TS para frecuencias altas, más acorde a las operativas, puede verse en la Figura 4 bajo altitud  $0^\circ$  y utilizando la misma mesh. Se necesitarían 9 millones de triángulos planos para representar adecuadamente la curvatura ahora (en la longitud del submarino entran  $320/480 \lambda$  a  $f = 8/12$  kHz). Con frecuencia suficientemente alta el comportamiento especular esperable en el límite geométrico comienza a emerger. En particular en el caso del BeTSSi, su geometría, relativamente sencilla, permite identificar los picos principales de su respuesta angular con las reflexiones especulares provenientes de ciertas partes del mismo, según se muestra en el inserto dentro de la Figura 4.

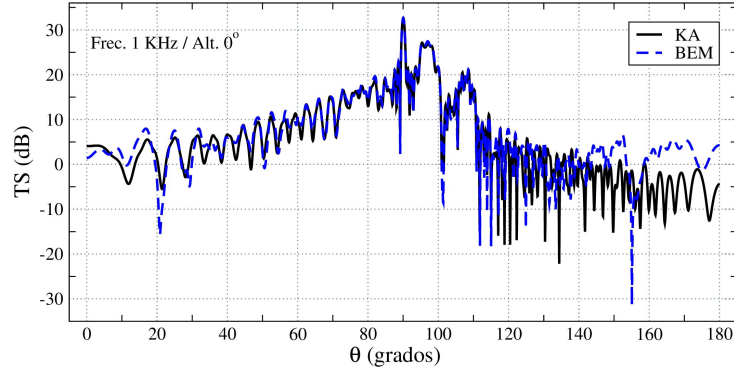
<sup>3</sup> Este error está presente en la evaluación del TS para submarinos aunque no es importante en la mayoría de los ángulos puesto que para muchas incidencias la superficie aparece mayoritariamente convexa.



**Figura 4.** TS de backscattering del submarino BeTSSi para altitud  $0^\circ$  (mesh de 18000 triángulos curvos) a las frecuencias indicadas. Las letras  $A, B, C$  identifican picos de la respuesta con aportes especulares (ver inserto).

### 3.2. Boundary Element Method y su aceleración

La necesidad de resolver un sistema matricial de tamaño  $N^2$ , donde  $N$  es la cantidad de triángulos planos, implica que para el caso del BEM convencional el coste computacional de aloación y cómputo requiere, a partir de cierta frecuencia, una solución de HPC (*High Performance Computing*). Una mesh de 77000 elementos basta para calcular adecuadamente TS con  $f = 1$  kHz bajo BEM, resultado que se muestra en Figura 5 superpuesto con la curva obtenida por la KA para la mesh de triángulos curvos<sup>4</sup>.



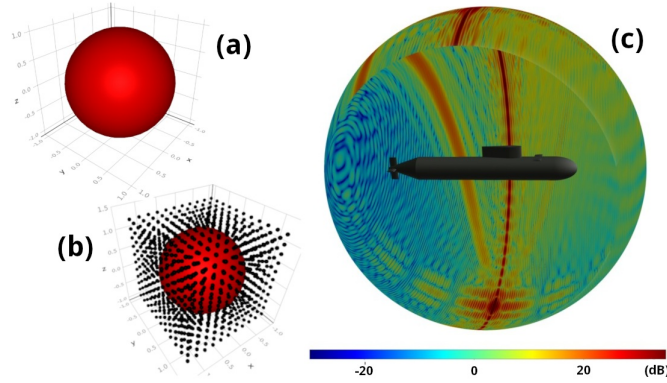
**Figura 5.** TS de backscattering a  $f = 1$  KHz para el submarino BeTSSi calculado por la KA y mediante BEM para meshes de 18000 y 77000 elementos, respectivamente.

<sup>4</sup> Para evitar problemas de sombras se han removido las aletas traseras.



La coincidencia de las curvas es muy buena para los ángulos  $\theta$  centrales y empeora con las incidencias cercanas a las direcciones longitudinales donde la superficie del submarino que enfrenta la onda aparece en ángulos muy pronunciados, para los cuales el poder predictivo de la KA es menor.

La notable exigencia de tiempo de cómputo que presenta BEM para problemas de alta frecuencia motivó la investigación de métodos que aceleran el cálculo de los elementos matriciales. Particularmente se ha implementado una solución basada en el uso de la Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform) [11] que permiten alcanzar *speed-ups* de hasta 1000x. El mecanismo de aceleración hace que la evaluación de la (7), que convencionalmente tiene un orden de  $\mathcal{O}(N^2)$  operaciones pase a ser una operación con complejidad  $\mathcal{O}(N \log N)$ . La transformación consiste en utilizar proyecciones sobre arreglos 3D que cubren el objeto, ver Figura 6, cuya disposición regular natural equiespaciada hace posible expresar la mencionada ecuación como una convolución sobre una grilla, que luego será evaluada de manera eficiente por la FFT. Esto reduce efectivamente los tiempos de cálculo cuando  $N$  es muy grande. Detalles en la Ref. [12].



**Figura 6.** (a) Malla del dispersor. (b) Objeto equivalente, en el cual la interacción entre los valores de campo en cada triángulo aparecen como fuentes equivalentes localizadas en una grilla equiespaciada (puntos negros). (c) Gráfico polar 3D de TS angular para el BeTSSi simple calculado por BEM acelerado. Se incide desde el polo norte, a  $f = 2$  kHz, usando una malla de  $\sim 340$  mil elementos (Ref. [12]).

#### 4. Conclusiones

La diferente naturaleza de las dos formulaciones para el cálculo de TS de submarinos aquí presentadas, así como sus diferentes rangos de aplicabilidad y coste computacional demuestran su fuerte carácter complementario y la utilidad de operar con ellas en tándem. Si bien la KA es una solución que no es correcta bajo ciertos ángulos y en frecuencias intermedias o bajas, es cierto que su

aplicación es sencilla y no está aquejada de las mismas limitaciones de memoria que enfrenta un método como BEM que en general necesita resolver un sistema matricial de grandes proporciones. Por otra parte, para el régimen y las condiciones donde ambas deberían dar resultados similares, ello significa que se tiene un método alternativo de probar mejoras en una formulación comparando con la performance de la otra cuando otro tipo de benchmarks no están disponibles. Los pasos siguientes en el desarrollo sobre el BEM se orientan hacia la mejora y ampliación de los promisorios esquemas acelerados basados en FFT. En cuanto a la KA los desarrollos tienden a buscar soluciones al problema de la concavidad. Todos los códigos computacionales han sido desarrollados en lenguaje Julia [13], el cual provee un excelente compromiso entre eficiencia y facilidad de uso.

## Referencias

1. J.D. González, S. Blanc, I.S. Prario, y A. Madirolas (2011). *Modelling fish acoustic response: application to laboratory essays on perch (Percichthys trucha)*. *Anales AFA*, 23, 92–101.
2. I. S. Prario, J. D. González, A. Madirolas, y S. Blanc (2015). *A Prolate Spheroidal Approach for Fish Target Strength Estimation: Modeling and Measurements*. *ACTA ACUSTICA united with ACUSTICA*, 101, 928–941.
3. J.D. Gonzalez, E.F. Lavia, S. Blanc *A Computational Method to Calculate the Exact Solution for Acoustic Scattering by Liquid Spheroids*, *Acta Acustica united with Acustica*, Volume 102, Number 6, pp. 1061-1071(11), (2016).
4. E.F. Lavia, J.D. Gonzalez, S. Blanc *Modelling High-Frequency Backscattering from a Mesh of Curved Surfaces Using Kirchhoff Approximation*, *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*, (2018).
5. J.D. González, E.F. Lavia, S. Blanc, M. Maas, A. Madirolas, *Boundary-element method to analyze acoustic scattering from a coupled swimbladder-fish body configuration*, *Journal of Sound and Vibration* 486:115609, (2020).
6. X. Baker, B. Bevan, y E. T. Copson, (1939). *The mathematical theory of Huygens principle*. Oxford Clarendon Press.
7. A.T. Abawi, (2016). *Kirchhoff scattering from non-penetrable targets modeled as an assembly of triangular facets*. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 140(3), 1878–1886.
8. S.M. Kirkup, (2007). *The Boundary Element Method in Acoustics*.
9. A. Ribes, y C. Caremoli, (2007). SALOME platform component model for numerical simulation. In *Computer Software and Applications Conference, 2007. COMPSAC 2007. 31st Annual International*, vol. 2, (pp. 553–564). IEEE.
10. C.W. Nell y L.E. Gilroy, (2003). *An improved basis model for the BeTSSi submarine*. *DRDC Atlantic TR*, 199.
11. T. Hengjiao, et al, (2021). *Modeling three-dimensional underwater acoustic propagation over multi-layered fluid seabeds using the equivalent source method*. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 150(4), 2854–2864.
12. R. Marques Rojo, (2023). *Métodos acelerados convolucionales para la optimización de modelos de scattering acústico*. Tesis de Grado, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ingeniería. [consultado: 19/8/2024]. Disponible en el Repositorio Digital Institucional de la Universidad de Buenos Aires.pp 1–65.
13. J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski, y V.B. Shah, (2017). *Julia: A fresh approach to numerical computing*. *SIAM review*, 59(1), 65–98.